

Konzept

Zahlenmauern

 **OSTFRIESISCHE
LANDSCHAFT**
REGIONALES PÄDAGOGISCHES ZENTRUM
-RPZ-

AURICH
MÄRZ 2010

Inhalt

1.1 Wozu ein Heft zu Zahlenmauern ?

1.2 Kompetenzorientierung und Zahlenmauern

1.3 Variablen, Terme und Zahlenmauern

1.4 Anregungen

1.1 Wozu ein Heft zu Zahlenmauern ?

Der Übergang von der Grundschule zur weiterführenden Schule ist für die Schülerinnen und Schüler ein gewaltiger Schritt. Aber auch für die Lehrerinnen und Lehrer ist es schwierig, die Kinder in Empfang zu nehmen, ohne viel von ihrer persönlichen und schulischen Vorgeschichte zu wissen.

Mit diesem Heft sind folgende Zielsetzungen verbunden:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen mit Hilfe dieses Heftes angeregt werden, ein eigenes Bild von Mathematik zu entwickeln.
- Sie sollen in die Lage versetzt werden, eine Sache zu durchschauen, zu überschauen, sie einzuordnen und zu bewerten. Die Zahlenmauern dienen hier als Sache, an der man experimentieren und beobachten kann, deren Aufbau man durchschauen, wo man Regeln entdecken und sie konkret und formal formulieren kann und wo die Bedeutung der Variablen deutlich wird.
- Mit Hilfe dieses Heftes können die Schülerinnen und Schüler kooperativ lernen, da die Aufgabenstellungen in Partnerarbeit bearbeitet werden können.
- Die Bildungsstandards werden beachtet und der Bezug zu den Kerncurricula bzw. Rahmenrichtlinien gewahrt.
- Beim Übergang von der Grundschule zur weiterführenden Schule sollen die Schülerinnen und Schüler am bekannten Format „Zahlenmauer“ Altes beleben und Neues entdecken.
- Ausgehend vom Kopfrechnen soll der Weg geebnet werden, Strukturen zu erkennen und zu beschreiben. Dabei werden „Zahlenspeicher“ als Vorstufe von Variablen verwendet. Das konkrete Rechnen bewirkt Formalisierungen, diese wiederum rufen erneut Rechenprozesse in Gang.
- Mit Hilfe der frühen Einbeziehung von Variablen in den Mathematikunterricht, kann einer Entzerrung der Algebra Vorschub geleistet werden.
- Dieses Heft soll unabhängig vom Lehrwerk differenziert eingesetzt werden.

Mit diesem Heft sind folgende Erweiterungen und Vertiefungen möglich:

- Vorgegebene Zahlenmauern werden untersucht, unvollständige werden ergänzt.
- Zahlenmauern, in denen multipliziert, subtrahiert oder dividiert wird, können einbezogen werden.
- Der Blick auf Potenzen kann entwickelt und geschärft werden.
- Schülerinnen und Schüler sollen Fragestellungen zu Zahlenmauern selbst erfinden.

Über das Heft hinaus ist es für höhere Jahrgänge denkbar, andere Zahlbereiche und Rechenoperationen einzubeziehen.

1.2 Kompetenzorientierung und Zahlenmauern

Das Aufgabenformat „Zahlenmauern“ verbindet die inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche „Zahlen und Operationen“ und „Muster und Strukturen“ (Primarstufe) bzw. die Leitidee „Zahl“ (Sekundarstufe I) mit den prozessbezogenen Kompetenzbereichen „Kommunizieren“, „Argumentieren“ und „Problemlösen“.

Das wird dadurch deutlich, dass

- über das Rechnen gesprochen wird: in der Partnerarbeit, in der Kleingruppe, mit dem Lehrer, im Plenum.
- Vorgehensweisen beschrieben, erklärt, begründet und verglichen werden.
- Überlegungen, Beobachtungen und Rechnungen verschriftlicht werden.
- Umkehraufgaben und offene Problemsituationen bearbeitet werden.
- Aufgaben erfunden werden sollen.

1.3 Variablen, Terme und Zahlenmauern

Wie in 1.1. dargestellt, sprechen viele Gründe für ein frühes Umgehen mit Variablen. Das komprimierte Behandeln der Algebra führt ganz offensichtlich nicht zu nachhaltigen Erfolgen. Das vorwiegend kalkülbetonte Umgehen mit Variablen bei Funktionen, Termumformungen und dem Lösen von Gleichungen vernachlässigt den bedeutungshaltigen Bereich.

Früh angelegtes bedeutungshaltiges Lernen mit Elementen der Algebra dient der Entzerrung der Algebra!

Im frühen Mathematikunterricht tauchen, zumindest implizit, immer wieder funktionale Überlegungen auf, z. B. bei den Zahlenmauern. Warum soll hier im Sinne einer Mathematisierung nicht ein erster Umgang mit „variablen“ Schreibweisen und Notationen in Form von Termen mit Variablen mitgelernt werden?

Früh angelegte Mathematisierung von funktionalen Überlegungen dient der Entzerrung der Algebra!

Die Frage, ob das für viele Schülerinnen und Schüler eine Überforderung ist, liegt möglicherweise nahe. Erste Erfahrungen und auch empirische Untersuchungen zeigen aber, dass das Verwenden von Variablen durchaus ab Klasse 5 möglich ist.

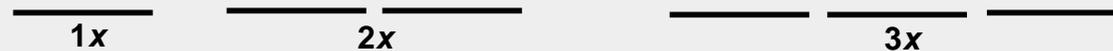
Dazu die folgenden Überlegungen:

Es geht hier nicht um das Trainieren formaler Kalküle, sondern um ein erstes Verwenden von Variablen in überschaubaren Situationen, hier also den Zahlenmauern. Diese sind meist aus der Grundschule bekannt. Viele Schülerinnen und Schüler bringen aus der Grundschule auch erste Erfahrungen mit Variablen mit.

Wir legen Wert auf Bedeutungshaltigkeit in folgendem Sinne:

- Variablen betrachten wir zunächst als „Speicherstelle“ für ganze Zahlen (meist von 0 oder 1 bis 10 bzw. von 0 oder 1 bis 100).
- Das Umgehen mit Variablen erfolgt nicht kalkülhaft, sondern bedeutungshaltig,

z. B. das Deuten von x als $1x$, das Visualisieren als Strecke, das Deuten von $1x + 2x = 3x$ als Streckenaddition



- Terme sind „Produktionsvorschriften“. Sie liefern Antworten auf Fragen wie z. B.: Wie entsteht die Zielzahl aus der Basiszahl? Welche Zahlen produziert der Term $8x + 12$ beim Einsetzen von Zahlen?.
- Terme können gedeutet werden, z. B. $8x + 12$ als Zahlenfolge der 8er-Reihe + 12.
- Zielzahlen als Term mit Variablen oder als Zahl haben eine Geschichte:
Wie war die Ausgangssituation? Das führt zu Überlegungen zum Lösen von Gleichungen.

Mathematische Begriffe, z. B. Variable, sind in der Regel sehr *aspektreich*. Diese Aspekte nennen wir *Grundvorstellungen*. Das Vorhandensein von Grundvorstellungen erlaubt ein verständnisvolles und flexibles Umgehen in mathematischen Situationen und Anwendungen. Die mit dem Bilden von Grundvorstellungen verbundenen Lernprozesse nennen wir *grundlegende Verfahren*.

Das Offenlegen der zu verhandelnden Grundvorstellungen und der damit verbundenen Verfahren kann für die Planung, Diagnose und Evaluation sehr hilfreich sein.

Die Bereiche Grundvorstellungen und grundlegende Verfahren sind nicht unabhängig voneinander, sie bedingen sich z. T. auch gegenseitig: Fehler beim Umgehen mit grundlegenden Verfahren sowie Äußerungen

von Schülerinnen und Schülern können z. B. auf nicht vorhandene Grundvorstellungen hinweisen, die u. U. den Lernprozess behindern.

Die folgende Tabelle stellt die aus unserer Sicht notwendigen Grundvorstellungen und Verfahren beim Umgehen mit Variablen vor dem Hintergrund der Zahlenmauern dar.

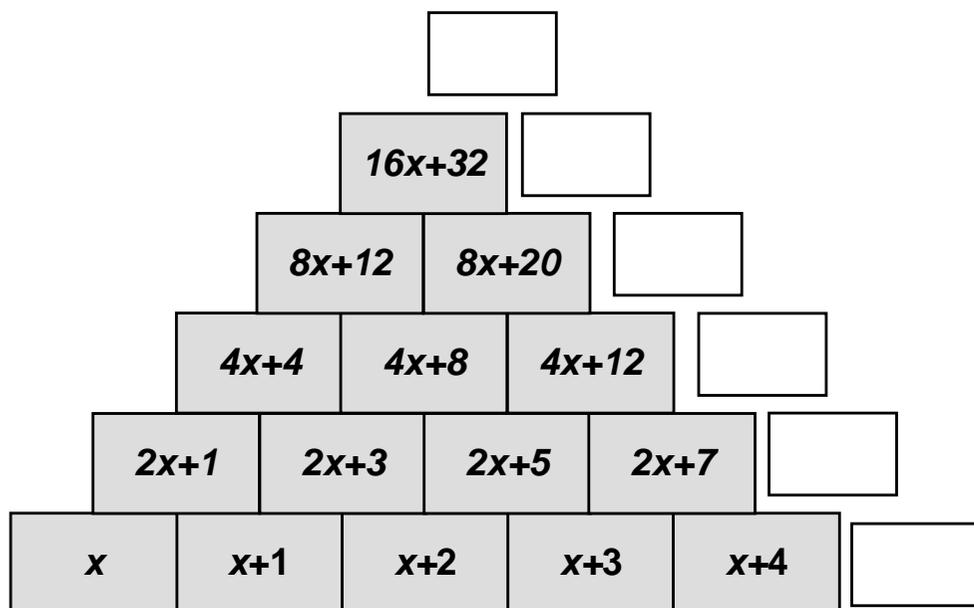
Grundvorstellungen zu Variablen	Grundlegende Verfahren
Einsetzaspekt <ul style="list-style-type: none"> - sukzessiv - simultan 	Tabellen zu Termen erstellen: Werte der Reihe nach einsetzen „Im Kopf“ Zahlen simultan einsetzen, z.B. in $2 \cdot x + 1$: deuten als Zweierreihe +1 oder Zahlenspeicher für ungerade Zahlen.
Kalkülaspekt <ul style="list-style-type: none"> - mit Variablen rechnen - Terme deuten 	x als $1 \cdot x$ deuten $x + (x + 1)$, evtl. mit Strecken untersuchen oder verbalisieren als „Zahl plus Nachfolger ergibt zweimal Zahl plus 1“. Direkt (durch simultanes Einsetzen) erkennen. Z.B.: <ul style="list-style-type: none"> • $8 \cdot x + 12$ ist eine Zahlenfolge der Art „8-er-Reihe + 12“ • $2 \cdot x$ beschreibt gerade Zahlen oder das Verdoppeln einer Zahl • $x : 2$ ist eine Produktionsvorschrift für das Halbieren

1.4. Anregungen

Zu Zahlenmauern gibt es zahlreiche Aufgabenstellungen. Wir haben uns auf die beschränkt, die uns beim Arbeiten mit Variablen wichtig erschienen. Für Vertiefungen und Ergänzungen hier noch eine kurze Ideensammlung.

- Systematisierungen
Systematisch untersuchen, welche Zielzahlen bei 2-er, 3-er, 4-er,... Mauern entstehen, wenn z. B die
 - Basis aus lauter gleichen,
 - Basis aus fortlaufenden,
 - Basis aus fortlaufenden geraden (ungeraden,...) Zahlen besteht.
- Optimierungsaufgaben
Z. B.: In der Basis stehen unterschiedliche Zahlen. Wie muss man sie anordnen, damit die Zielzahl möglichst groß (klein) wird?
- Andere Verknüpfungen
 - Multiplikation
 - Subtraktion
 - kgV
- Internetlink
 - <http://www.lehrer-online.de/zahlenmauern-entdecken.php>

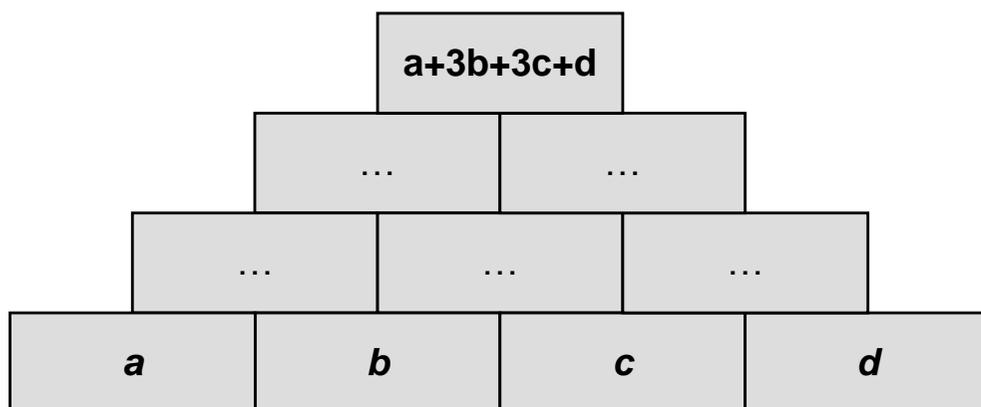
Beispiele zur Systematisierung:



Regelmäßigkeiten in Zahlenmauern lassen sich experimentell oder mit Variablen untersuchen, z. B.

- durch Vergleichen der einzelnen Schichten.
- durch Anfügen weiterer Steine (siehe Bild) die Zahlenmauer um eine (zwei, drei, ...) Schicht(en) erhöhen.
- durch Erkennen von Mauern in der Mauer. So sind z. B. die linken Steine die Zielzahlen von Mauern mit einer (zwei, drei, ..) Schicht(en).

Das systematische Erfassen von Zielzahlen kann auch für (Selbst-)Kontrollen bei Aufgaben verwendet werden.



Vier Zahlen in der Basis sollen so angeordnet werden, dass die Zielzahl möglichst groß (möglichst klein) wird.

Der experimentelle Lösungsweg ist aufwändig. Mit Variablen und der Deutung des Terms der Zielzahl erkennt man schnell eine Strategie: Wenn die größeren Zahlen in der Mitte angeordnet werden, erhält man wegen der Dreifachgewichtung eine große Zielzahl.