Schulung der Raumvorstellung

Andreas Koepsell
Charlottenstr.11
30449 Hannover

6. August 2002

Zusammenfassung

Diese Broschüre zeigt unterrichtliche Möglichkeiten der Schulung der Raumvorstellung in einer 4. bis 6. Klasse (Grundschule - Förderstufe - Orientierungsstufe ,..). In der didaktischen Literatur wird häufig die „untergeordnete “ Rolle der Geometrie in der Grundschule beschrieben. Dies trifft im besonderen Maße für geometrische Inhalte zur Schulung der Raumvorstellung zu. Ein Grund hierfür ist häufig das Fehlen an Materialien und Ideen, diesen Teil des Mathematikunterrichts anspechend und handlungsorientiert zu gestalten. Der Artikel versucht diese Lücke zu schließen.

Inhaltsverzeichnis

1 Ein Farbwürfel mit drei Farben **1**
1.1 Unterrichtliche Vorbereitungen 1
1.2 Ein Färbeplan 2
1.3 Darstellung des Färbeplans 3
1.4 Färben der Einzelwürfel 3

1 Ein Farbwürfel mit drei Farben

In einer 5. und einer 6. Klasse habe ich als Unterrichtsgegenstand [1] einen Farbwürfel eingesetzt, der mit 3 unterschiedlichen Farben - Rot, Grün und Blau - gefärbt ist. Er besteht aus 27 Einzelwürfeln und kann so zusammengesetzt werden, dass außen nur eine Farbe zu sehen ist. Es lässt sich aus den Einzelwürfeln also sowohl ein roter, ein grüner als auch ein blauer Gesamtwürfel aufbauen. Beim Aufbau dieser farbigen Gesamtwürfel wird man Strategien bilden und beachten müssen. Schülerinnen und Schüler unterscheiden sehr bald „Eck - Würfel“, „Kanten-Würfel„ und “Flächen-Würfel“ für die drei verschiedenen Farben. Unter „Eck-Würfel“ verstehen sie einen Einzelwürfel, der drei gleich gefärbte benachbarte Seitenflächen besitzt und beim Aufbau eines farbigen Gesamtwürfels dann eine Ecke bildet. Die Bezeichnungen „Kanten-Würfel“ und „Flächen-Würfel“ ergeben sich entsprechend. Im Unterricht werden nicht nur farbige Gesamtwürfel gebaut, sondern es werden auch die benutzten Strategien besprochen und aufgeschrieben. Folgende Aufgabenstellungen für eine schriftliche Bearbeitung durch Schülerinnen und Schüler sind sinnvoll:

- Wie baut man möglichst schnell einen einfarbigen $3 \cdot 3 \cdot 3$ -Würfel auf? Beschreibe dein Vorgehen.
- Welcher Einzelwürfel kommt in die Mitte des $3 \cdot 3 \cdot 3$ -Würfels, wenn dieser außen grün sein soll?
- Kann man einen Gesamtwürfel aufbauen, der drei grüne und drei blaue Flächen besitzt?
- Warum gibt es im Farbwürfel - Spiel keinen einfarbigen Einzelwürfel?
-

1.1 Unterrichtliche Vorbereitungen

Bevor eine Lehrerin / ein Lehrer diese Differenzierungsmaterial einsetzt, muss das Unterrichtsmaterial erstellt werden. Man braucht nicht für jeden Schüler / jede Schülerin einen solchen Farbwürfel. Für eine Mathe-Ecke - als binnen differenzierendes Material - reichen 2 bis 3 Würfel pro Klasse. Mit diesem Material können in ausgezeichneter Weise die drei Aspekte der Raumvorstellung geschult werden:

- räumliches Orientieren
- räumliches Vorstellen
- und räumliches Denken.

[1] Als Unterrichtsgegenstand bezeichne ich ein Lehrangebot, dass sich nicht zeitgleich an alle Schülerinnen und Schüler einer Klasse richten muss.

Für die Erstellung des Farbwürfels verwendet man Buchen-Würfel der Firma Hail Lehrmittel (im Internet leicht zu finden unter www.hail.de) mit einer Kantenlänge von 2 cm. Diese gibt es in Packungseinheiten zu 100 Würfeln. Aus einer solchen Packungseinheit lassen sich drei Farbwürfel erstellen. Zum Färben der Würfel eignet sich besonders gut Plaka-Farbe.

1.2 Ein Färbeplan

Im Folgenden werden die inhaltlichen Überlegungen dargestellt, die beim Aufstellen eines Färbe-Plans notwendig sind. Ein $3 \cdot 3 \cdot 3$ -Würfel besteht aus 27 Einzelwürfeln. Jeder der 27 Einzelwürfel hat 6 Würfelflächen. Es sind also $27 \cdot 6 = 162$ Seitenflächen einzufärben. Der $3 \cdot 3 \cdot 3$-Würfel kann ganzfarbig grün, blau oder rot zusammengebaut werden. Dann sind alle äußeren Flächen des Gesamtwürfels einfarbig. Der Gesamtwürfel besitzt ebenfalls 6 Würfelflächen, die aber jeweils wieder aus 9 Einzelwürfel-Flächen bestehen. Man benötigt also zum Aufbau eines grünen Gesamtwürfels mindestens $6 \cdot 9 = 54$ grüne Einzelwürfel-Flächen, ebenso viele blaue und rote. Die $3 \cdot 54$ Einzelwürfel-Flächen ergeben zusammen die 162 Flächen aller 27 Einzelwürfel.

Das bedeutet:

- Beim grünen Gesamtwürfel gibt es keine nach innen gerichtete grüne Einzelfläche. Der im Mittelpunkt des grünen Gesamtwürfels liegende Einzelwürfel (Mitten-Würfel) besitzt nur die zwei Restfarben Rot und Blau.
- Für jede Farbe gibt es:
  - 8 Eck-Würfel: Diese besitzen drei gleich gefärbte, benachbarte Seitenflächen.
  - 12 Kanten-Würfel: Diese besitzen 2 benachbarte, gleich gefärbte Flächen.
  - 6 Flächen-Würfel: Diese besitzen für die jeweilige Farbe nur eine gefärbte Fläche.
  - 1 Mitten-Würfel: Er besitzt die Farbe des Gesamtwürfels nicht.

Hiermit sind die 27 Einzel Würfel für eine Farbe vollständig beschrieben.

Wie kombiniert man nun aber die Farbbedingungen der drei einzelnen Farben auf die 27 Einzelwürfel? Man muss sich zusätzlich mit den Farbkombinationen, die für die Einzelwürfel gelten, beschäftigen.

Für diese Farbkombinationen gilt:

- In einem (Einzel)Würfel gibt es nicht mehr als drei Farben.
- In einem Würfel dürfen nicht mehr als drei Flächen gleich gefärbt werden.
- Alle gleichgefärbten Flächen sind grundsätzlich benachbarte Flächen.

- Für die sechs Seitenflächen eines Einzelwürfels sind folgende Farbkombinationen möglich:

  A: $6 = 3 + 3$

  B: $6 = 3 + 2 + 1$

  C: $6 = 2 + 2 + 2$

Wenn man nun die gewonnenen Erkenntnisse kombiniert, bekommt man einen vollständigen Färbe-Plan. Für den grünen Gesamtwürfel wurde beschrieben, dass es nur einen Einzelwürfel ohne grüne Fläche gibt. Dieser besitzt die **Farbkombination A** (6 = 3 + 3) und ist für die beiden anderen Farben Blau und Rot jeweils ein Eck - Würfel. Einen solchen 6 = 3 + 3 Einzelwürfel gibt es für jede Farbe. Wir erhalten also 3 Einzelwürfel mit der Farbkombination A.

Die Anzahl der Einzelwürfel für die **Farbkombination B** kann unterschiedlich hergeleitet werden:

- Für jede Farbe muss es 6 Flächen-Würfel geben. Die Zahl 1 gibt es nur in der Farbkombination B. Diese Kombination muss daher 18 mal auftauchen.

- Für jede Farbe benötigt man 8 Eck - Würfel. 2 Eck - Würfel kommen für jede Farbe in der Farbkombination A vor. Also muss für jede Farbe die Eck-Kombination 3 + 2 + 1 noch sechs mal vorkommen.

Die **Farbkombination C:**

Für jede Farbe muss es 12 Kanten Würfel geben, die zwei gleich gefärbte Flächen enthalten. In der Farbkombination B gibt es schon 18 mal die zwei gleichgefärbten Flächen. Dies sind pro Farbe 6 Kanten Würfel. Dies bedeutet, wir benötigen noch 6 mal die Farbkombination C (6 = 2 + 2 + 2). Man könnte nun meinen, dass sich alle Einzelwürfel der Farbkombination C vollkommen gleichen. Um es noch ein wenig spannender zu machen, gibt es im Färbe-Plan noch einige Variationen, so dass möglichst wenig „kongruente “ Einzelwürfel entstehen.

1.3 Darstellung des Färbeplans

In der Hoffnung, dass der geneigte Leser noch all dies verstanden hat, komme ich jetzt zur Darstellung des Färbeplans. Jeder Einzelwürfel wird als Netz dargestellt und durchnummeriert. Die Netzdarstellungen sind nach den oben beschriebenen Farbkombinationen sortiert. In der Farbkombination B sind die 6 Eck - Würfel einer Farbe nebeneinander dargestellt.

1.4 Färben der Einzelwürfel

Wenn man mit Schülerinnen / Schülern oder anderen Personen mit eventuell eingeschränkter Raumvorstellung einen solchen Farbwürfel nach diesem Färbeplan anfertigen

will, so sollte man folgendes dringend beachten:

- Es ist äußerst hilfreich alle 27 Einzelwürfel zu Beginn mit einem Bleistift möglichst vorsichtig zu nummerieren.
- Man benötigt zum Einfärben mehr Zeit als eine Schulstunde.
- Es ist „tödlich“, wenn zwei unterschiedliche Bausätze (Farbwürfel) durcheinander geraten.
- Achten Sie auf sinnvolle Verpackungen. Zunächst reicht ein Gefrierbeutel mit Gummiband.
- Es wird immer mit einer Farbe gearbeitet und alle Einzelwürfel entsprechend eingefärbt und dann wieder abgelegt. Beginnt man mit der zweiten Farbe, so ist die erste schon trocken.
- Es ist nicht nötig, die Finger anzumalen.

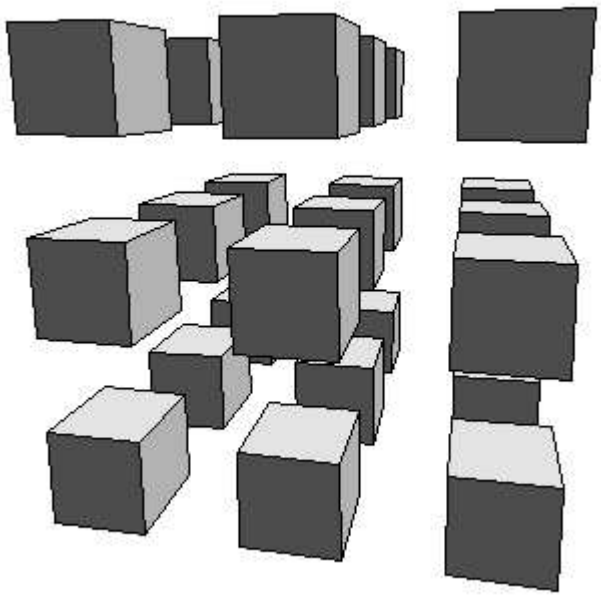
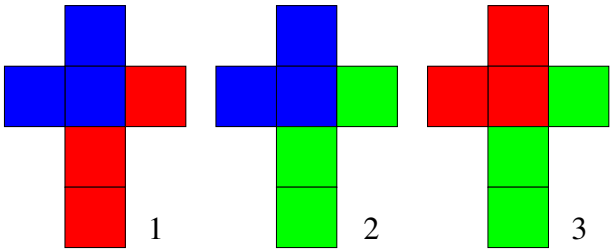
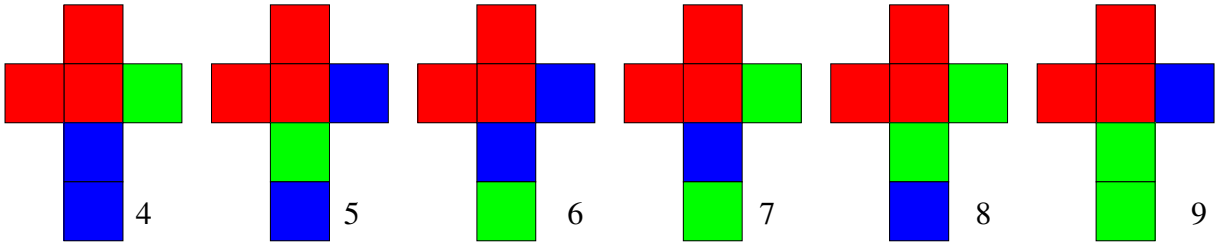


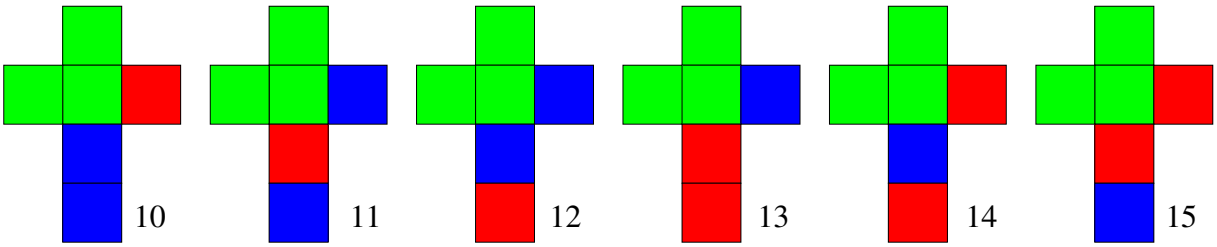
Abbildung 1: Der Farbwürfel

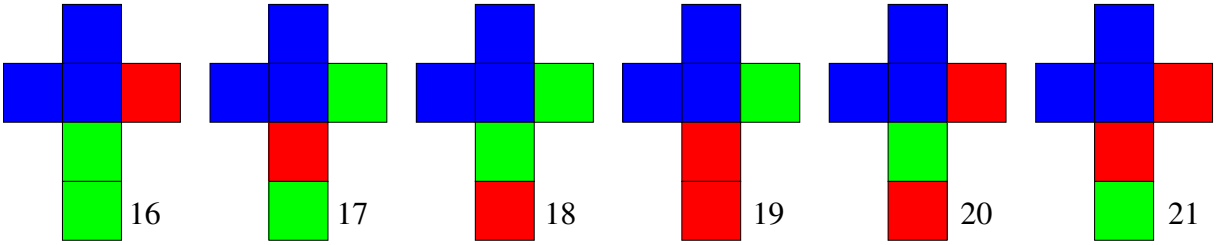
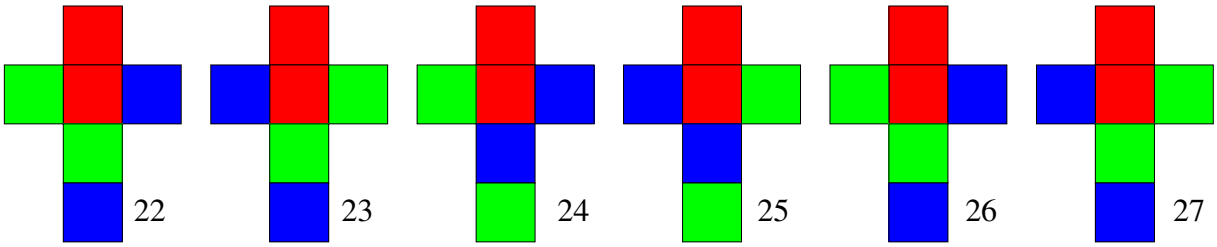
A



B







C